

# Chapitre 13. Limites et continuité

## 1 Voisinage

**Définition 1.1.** Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Un voisinage de  $a$  :

- \* Si  $a \in \mathbb{R}$ , est un ensemble qui contient  $[a - \delta, a + \delta]$ , pour un certain  $\delta > 0$
- \* Si  $a = +\infty$ , est un ensemble  $[A, +\infty[$  pour un certain  $A \in \mathbb{R}$
- \* Si  $a = -\infty$ , est un ensemble  $]-\infty, A]$  pour un certain  $A \in \mathbb{R}$

**Lemme 1.2.** Soit  $V$  un voisinage de  $+\infty$

Alors il existe une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$  telle que  $v_n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

**Définition 1.3.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$

On dit qu'une propriété (de la fonction  $f$ ) est vraie au voisinage de  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que la propriété soit vraie sur  $V \cap I$

## 2 Notion de limite

Cadre : Dans cette section,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction définie sur une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a$  est un élément de  $I$  ou  $\pm\infty$ . En pratique,  $I$  sera un intervalle et  $a$  un point ou une borne de l'intervalle.

### 2.1 Limites en $\pm\infty$

**Définition 2.1.** Soit  $I$  un ensemble non majoré et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  On dit que :

- \*  $f$  converge vers  $l \in \mathbb{R}$  en  $+\infty$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists H \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq H \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$
- \*  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists H \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq H \implies f(x) \geq A$
- \*  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $+\infty$  si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists H \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq H \implies f(x) \leq A$

### 2.2 Limites en un réel

Cadre :  $a \in \overline{I}$

**Définition 2.2.** Soit  $a \in \overline{I}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- \* On dit que  $f$  tend vers  $l \in \mathbb{R}$  en  $a$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$
- \* On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$  si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq A$
- \* On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $a$  si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \leq A$

**Proposition 2.3.** Soit  $a \in I$

Si  $f$  admet une limite (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) en  $a$ , cette limite est nécessairement  $f(a)$

### 2.3 Variantes

**Définition 2.4.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J$  une partie de  $I$  et  $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ . On suppose que  $a$  est arbitrairement proche d'éléments de  $J$  (càd  $a \in \bar{J}$  ou ( $a = +\infty$  et  $J$  n'est pas majoré) ou ( $a = -\infty$  et  $J$  n'est pas minoré))

On dit alors que  $f(x) \xrightarrow[x \in J]{x \rightarrow a} l \in \mathbb{R}$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in J, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad (\text{cas } a \in \mathbb{R})$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H \in \mathbb{R} : \forall x \in J, x \geq H \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad (\text{cas } a = +\infty)$$

etc...

**Proposition 2.5.** Soit  $J_1, J_2$  deux parties de  $I$ ,  $a \in I \cup \{\pm\infty\}$  et  $l \in \bar{\mathbb{R}}$ . On suppose que  $a$  est arbitrairement proche d'éléments de  $J_1$  et de  $J_2$

Alors

$$f(x) \xrightarrow[x \in J_1 \cup J_2]{x \rightarrow a} l \iff \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \in J_1]{x \rightarrow a} l \\ f(x) \xrightarrow[x \in J_2]{x \rightarrow a} l \end{cases}$$

## 3 Propriétés de la limite

### 3.1 Caractère local

**Proposition 3.1.** Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$  arbitrairement proches d'éléments de  $I$

Si  $f$  et  $g$  coïncident au voisinage de  $a$ , alors  $f$  admet une limite en  $a$ ssi  $g$  en admet une. Dans ce cas, ces limites sont les mêmes.

### 3.2 Propriétés des fonctions convergentes

**Proposition 3.2.** Les fonctions convergentes sont localement bornés :

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$  tel que  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l \in \mathbb{R}$

Alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

**Proposition 3.3** ( $\mathbb{R}_+^*$  est ouvert). Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$

Si  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l \in \mathbb{R}_+^*$ , alors  $f$  est  $> 0$  au voisinage de  $a$ .

### 3.3 Caractérisation séquentielle de la limite

**Théorème 3.4.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ . Soit  $l \in \bar{\mathbb{R}}$

On a  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l$  si et seulement si, pour toute suite  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$  telle que  $\xi_n \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} a$ , on a  $f(\xi_n) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} l$

### 3.4 Composition des limites

**Théorème 3.5** (À retenir mais mal énoncé). Si  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$  et  $g(y) \xrightarrow[y \rightarrow b]{} l$ , alors  $g(f(x)) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l$

**Théorème 3.6** (Plus précis). Soit  $f : I \rightarrow J$  et  $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$  et  $b \in \bar{\mathbb{R}}$  tels que  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$

\* Déjà,  $b \in \bar{J} \cup \{\pm\infty\}$

\* Pour toute fonction  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g(y) \xrightarrow[y \rightarrow b]{} l \in \bar{\mathbb{R}}$ , on a  $g(f(x)) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l$

### 3.5 Théorème de la limite monotone

**Théorème 3.7.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone.

- \* Si  $I$  n'est pas majoré,  $f$  admet une limite  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $+\infty$
- \* Si  $I$  n'est pas minoré,  $f$  admet une limite  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  en  $-\infty$
- \* Si  $a$  est un réel tel que  $a \in \overline{I \cap ]-\infty, a[}$ ,  $f$  admet une limite  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  à gauche de  $a$
- \* Si  $a$  est un réel tel que  $a \in \overline{I \cap ]a, +\infty[}$ ,  $f$  admet une limite  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  à droite de  $a$

## 4 Continuité

### 4.1 Continuité en un point

Cadre :  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$

**Définition 4.1.**  $f$  est continue en  $a$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

**Proposition 4.2** (Caractère local de la continuité). Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions.

Si  $f$  et  $g$  coïncident au voisinage de  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$  ssi  $g$  l'est.

**Définition 4.3.**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue à gauche (resp. à droite) et  $a$  si  $f(x) \xrightarrow[x \leq a]{x \rightarrow a} f(a)$  (resp.  $f(x) \xrightarrow[x \geq a]{x \rightarrow a} f(a)$ )

### 4.2 Continuité globale

**Définition 4.4.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue si elle est continue en tout point de  $I$

On note  $C^0(I) = C^0(I; \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues.

### 4.3 Opérations

**Théorème 4.5.** Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

- \* Soit  $a \in I$ . Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$ , alors  $\lambda f, |f|, \max(f, g), f + g, fg$  sont continues en  $a$ .
- \* Si  $f, g \in C^0(I)$ , alors  $\lambda f, |f|, \max(f, g), f + g, fg \in C^0(I)$

**Théorème 4.6.** Soit  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow J, g : J \rightarrow \mathbb{R}$

- \* Soit  $a \in I$ . Si  $f$  est continue en  $a$  et que  $g$  est continue en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .
- \* Si  $f$  et  $g$  sont continues,  $g \circ f$  l'est aussi.

**Théorème 4.7** ("Théorème"). Les fonctions usuelles vues au chapitre 5 (exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques, trigonométriques réciproques, trigonométriques hyperboliques) sont continues.

### 4.4 Prolongement par continuité

**Théorème 4.8.** Soit  $I \subseteq \mathbb{R}, a \in I$  tel que  $a \in \overline{I \setminus \{a\}}$  et  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Alors il existe un prolongement continu  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  si et seulement si  $f$  admet une limite finie en  $a$ .

Dans ce cas, un tel prolongement est unique, c'est

$$\tilde{f} : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases}$$

### 4.5 Prolongement des identités

**Théorème 4.9** (Prolongement des identités, version continue). Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues et  $A \subseteq I$

- \* Si  $f$  et  $g$  coïncident sur  $A$ , alors elles coïncident sur  $\overline{A} \cap I$
- \* En particulier, si  $f$  et  $g$  coïncident sur  $A$  et que  $A$  est dense dans  $I$ , alors  $f = g$

## 5 Fonctions continues sur un intervalle : propriétés globales

Dans toute cette section,  $I$  est un intervalle.

### 5.1 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 5.1.** Soit  $I$  un intervalle et  $f \in C^0(I)$ . Soit  $a < b \in I$ .

Soit  $y \in \mathbb{R}$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  (càd  $y \in [f(a), f(b)]$  ou  $y \in [f(b), f(a)]$ )

Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $y = f(c)$

**Corollaire 5.2.** Soit  $f \in C^0(I)$  et  $J \subseteq I$  un intervalle.

Alors  $f[J]$  est un intervalle.

"L'image continu d'un intervalle est un intervalle."

**Corollaire 5.3.** Soit  $I$  un intervalle et  $f \in C^0(I)$ . On suppose que  $f$  ne s'annule pas.

Alors  $f$  est de signe constant. On a  $f > 0$  ou  $f < 0$

**Corollaire 5.4** (TVI généralisé). Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $y$  strictement compris entre  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$  (dont on suppose qu'elles existent).

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = y$

### 5.2 Fonctions continues bijectives

**Théorème 5.5** (de la bijection monotone). Soit  $a < b$  deux réels et  $f \in C^0([a, b])$  strictement monotone.

Alors  $f$  induit une bijection entre  $[a, b]$  et le segment joignant  $f(a)$  et  $f(b)$

**Théorème 5.6.** Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles et  $f : I \rightarrow J$  une bijection continue. Alors :

- \*  $f$  est strictement monotone.
- \*  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est encore continue.

**Proposition 5.7.** Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et injective.

Alors  $f$  est strictement monotone.

**Lemme 5.8.** Soit  $g : J \rightarrow I$  une application bijective strictement monotone entre intervalles.

Alors  $g$  est continue.

### 5.3 Théorème des bornes atteintes

**Théorème 5.9** (de bornes atteintes). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un segment.

Alors il existe  $\sigma, \tau \in [a, b]$  tels que  $\forall x \in [a, b], f(\sigma) \leq f(x) \leq f(\tau)$

"Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes."

**Corollaire 5.10.** "L'image continue d'un segment est un segment"

Plus précisément, soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Alors  $f[[a, b]]$  est un segment.

### 5.4 Uniforme continuité

**Définition 5.11.**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

**Théorème 5.12** (Heine). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un segment.

Alors  $f$  est uniformément continue.

## 6 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

On considère des fonction  $I \rightarrow \mathbb{C}$  où  $I$  est une partie de  $\mathbb{R}$  (le plus souvent un intervalle). Comme dans le cas des suites, on définit  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \in \mathbb{C}$  soit avec la définition usuelle (interprétée avec des modules) soit avec

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(l) \\ \operatorname{Im}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(l) \end{cases}$$

En particulier, si  $a \in I$ ,  $f$  est continue en  $a$

(ce qui signifie  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ )

ssi  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues.

On abandonne : les fonctions tendant vers  $\pm\infty$ , gendarmes et compagnie, limite monotone, le TVI, les bijections monotones.

On garde : les théorèmes d'opération, la caractérisation séquentielle, le continuité uniforme et le théorème de Heine.

Pour le théorème de bornes atteintes, on peut appliques la version réelle à  $|f|$ .

**Théorème 6.1.** Soit  $f \in C^0([a, b]; \mathbb{C})$  une fonction continue sur un segment.

Alors  $f$  est bornée.

Plus précisément, on peut trouver  $\tau \in [a, b]$  tel que  $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq |f(\tau)|$